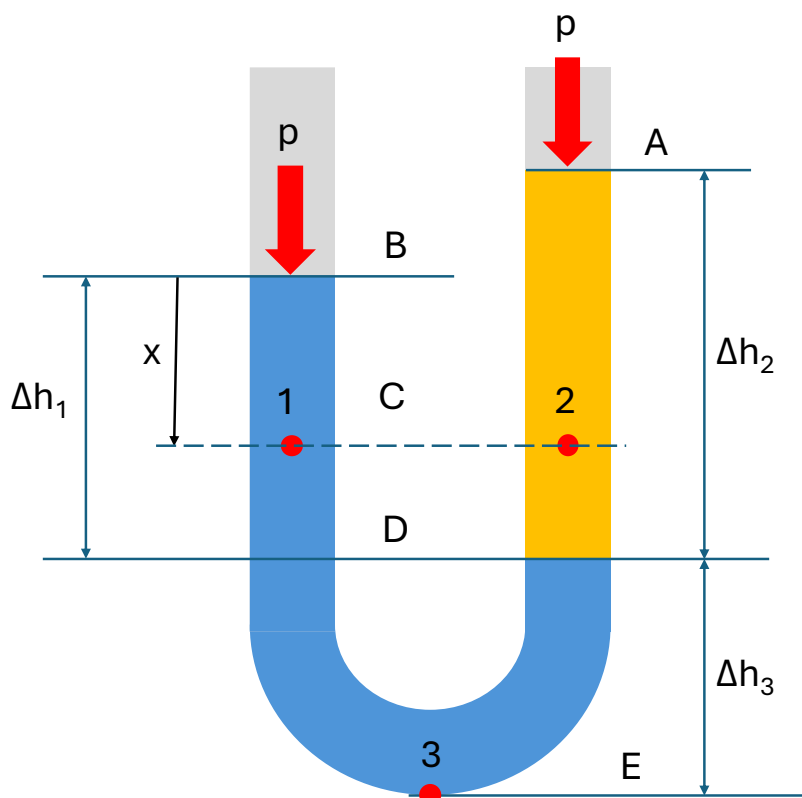


U – cijev problem

Na slici 1 je prikazan U-manometar u kojemu se nalazi voda (plavo), gustoće ρ_1 i ulje (žuto), gustoće ρ_2 . Površinu vode u lijevom kraku i površinu ulja u desnom kraku tlači isti tlak p . Je li tlak u točki 1 jednak, veći ili manji od tlaka u točki 2? Što kaže intuicija? Kada sam se prvi put susreo s ovim problemom, moja intuicija je mijenjala mišljenje frekvencijom većom od 1 Hz.



Slika 1

Topla voda je topla

Za početak, izračunajmo tlak u točki 3. Obzirom da je tlak u točki 3 (slika 1) jednak tlaku u točki 3, možemo za lijevi krak (1) pisati:

$$p_1 = p + \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_1 g \Delta h_3$$

a za desni (2):

$$p_2 = p + \rho_2 g \Delta h_2 + \rho_1 g \Delta h_3.$$

Tlak p_1 je jednak tlaku p_2 , odnosno

$$p + \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_1 g \Delta h_3 = p + \rho_2 g \Delta h_2 + \rho_1 g \Delta h_3$$

Nakon dokidanja i kraćenja dobivamo

$$\rho_1 \Delta h_1 = \rho_2 \Delta h_2$$

Jednadžba 1

Prvi zaključak

Na slici 1 se vidi da $\Delta h_2 > \Delta h_1$. To znači da je $\rho_2 < \rho_1$. Gustoća ulja je manja od gustoće vode.

Drugi zaključak

Tlak na razini D u lijevom kraku je (1), a u desnom (2)

$$p_1(D) = p + \rho_1 g \Delta h_1$$

$$p_2(D) = p + \rho_2 g \Delta h_2$$

Oduzmimo lijevu jednadžbu od desne:

$$p_1(D) - p_2(D) = p + \rho_1 g \Delta h_1 - p - \rho_2 g \Delta h_2$$

$$p_1(D) - p_2(D) = \rho_1 g \Delta h_1 - \rho_2 g \Delta h_2$$

Prema jednadžbi 1 $\rho_1 g \Delta h_1 = \rho_2 g \Delta h_2$, slijedi da je $p_1(D) - p_2(D) = 0$, tj. da su **tlakovi na razini D u oba kraka jednaki**.

Grafičko rješenje

Pokušajmo ovaj problem riješiti grafički. Znamo da je ovisnost tlaka o dubini linearna i znamo da je opća formula tlaka na nekoj dubini pravac oblika

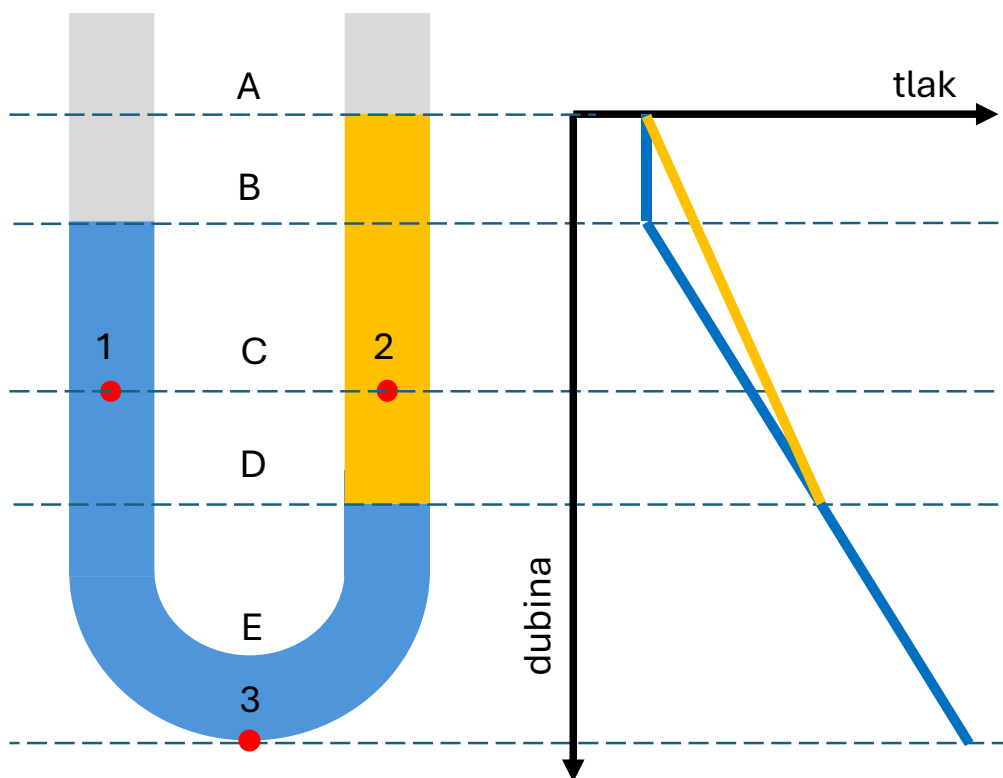
$$p(h) = p(0) + \rho g h$$

gdje je $p(h)$ tlak na dubini h , a $p(0)$ tlak na dubini $h = 0$, odnosno na površini. Slika 2 prikazuje promjene tlaka s dubinom za oba kraka. Plavom bojom je označena promjena tlaka u vodi, a žutom promjena tlaka u ulju. U tablici 1 su prikazane jednadžbe pravaca za oba kraka i za svaki segment cijevi. Lijevi krak opisuju dva pravca, prvi od razine A do razine B, a drugi od razine B do razine E. Desni krak također opisuju dva pravca, prvi od razine A do razine D, a drugi od razine D do razine E.

Vertikalni dio cijevi (razine)	Tlak na dubini h	
	Lijevi krak	Desni krak
A-B	$p_1 = p$	$p_2 = p + \rho_2 g h$
B-D	$p_1 = p - \rho_1 g \Delta h(A-B) + \rho_1 g h$	$p_2 = p + \rho_2 g h$
D-E	$p_1 = p - \rho_1 g \Delta h(A-B) + \rho_1 g h$	$p_2 = p - \rho_1 g \Delta h(A-B) + \rho_1 g h$

Tablica 1

Prema grafu, jasno se vidi da je **tlak na razini C u desnom kraku veći nego tlak u lijevom kraku**.



Slika 2

Analitičko rješenje

Pokušajmo sada doći do istog zaključka analitički. Prema *slici 1*, tlak u točki 1 (razina C) je $p_1 = p + \rho_1 g x$, a u točki 2 (razina C) je $p_2 = p + \rho_2 g x + \rho_2 g \Delta h_2 - \rho_2 g \Delta h_1$. Oduzimanjem jednadžbi dobivamo

$$p_1 - p_2 = p + \rho_1 g x - p - \rho_2 g x - \rho_2 g \Delta h_2 + \rho_2 g \Delta h_1$$

i umjesto $\rho_2 \Delta h_2$ upišemo $\rho_1 \Delta h_1$ (*jednadžba 1*)

$$p_1 - p_2 = \rho_1 g x - \rho_2 g x - \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_2 g \Delta h_1$$

na desnoj strani izlučimo $g x$ i $g \Delta h_1$

$$p_1 - p_2 = g x (\rho_1 - \rho_2) - g \Delta h_1 (\rho_1 - \rho_2)$$

Iz *slike 1* vidimo da je $x < \Delta h_1$ što znači da je i $g x < g \Delta h_1$. Znamo i da je $\rho_1 > \rho_2$. To dovodi do zaključka

$$g x (\rho_1 - \rho_2) - g \Delta h_1 (\rho_1 - \rho_2) < 0$$

odnosno

$$p_1 - p_2 < 0$$

i konačno

$$p_1 < p_2$$

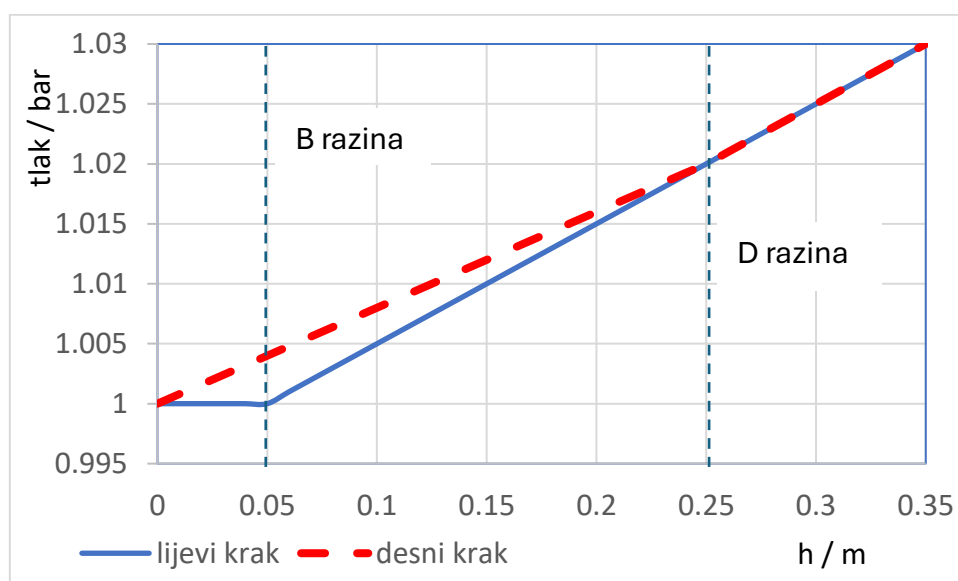
Tlak u desnom kraku na razini C (točka 2) je veći od tlaka u desnom kraku na razini C (točka 1). Analitičko rješenje je isto kao i grafičko. Možda i stvarno je tako?

Numerička provjera

Kako bi provjerili naše zaključke, koristeći jednadžbe iz *tablice 1*, izračunat ćemo tlakove od razine A (površina ulja) do razine E (dno manometra).

Zadajmo si konkretne vrijednosti:

$$\Delta h_1 = 0,2 \text{ m} \quad \Delta h_2 = 0,25 \text{ m} \quad \Delta h_3 = 0,1 \text{ m} \quad \rho_1 = 1000 \text{ kg m}^{-3} \quad \rho_2 = 800 \text{ kg m}^{-3}$$



Slika 3

Vidimo na *slici 3* da naši konkretni pravci imaju isti oblik kao i na *slici 2*. Razina B se nalazi na dubini $\Delta h_2 - \Delta h_1 = 0,25 \text{ m} - 0,2 \text{ m} = 0,05 \text{ m}$, razina D na dubini $\Delta h_2 = 0,25 \text{ m}$, a razina E na dubini $\Delta h_2 + \Delta h_3 = 0,25 \text{ m} + 0,1 \text{ m} = 0,35 \text{ m}$.

Općeniti zaključak

Tlak na svim dubinama manjima od dubine razine D je veći u desnom kraku nego u lijevom kraku.

Topla voda je topla...dok se ne ohladi!